

IV международная научная конференция Современные проблемы обратных задач

Новосибирск, Академгородок

Обратные задачи и оптимизация

Толстых Виктор Константинович

<https://tolstykh.com>

Донецкий государственный университет

2. Параметрическая идентификация моделей в ЧП

По наблюдениям состояния объекта

$$v_e(\tau) \in \textcolor{red}{V} = L_2(\omega \subset \Omega)$$

для модели в частных производных найти параметр

$$u(\tau) \in \textcolor{red}{U} = L_2(S \subset \Omega), \quad \omega \neq S.$$

Критерий качества идентификации — целевой функционал

$$J(u) = \int_{\omega} (v - v_e)^2 d\omega.$$

Прямой экстремальный подход — найти оптимальное управление прямой минимизацией $J(u)$:

$$u_*(\tau) = \arg \min J(u).$$

Получаем задачу бесконечномерной оптимизации.

Можно ли заменить конечномерной оптимизацией?

1. Аппроксимировать полиномом $u(\tau) = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i$. Возможно, в частных, удачных случаях. Но, возникают вопросы:

1.1. Какова степень n для достаточной аппроксимации $u_*(\tau)$?

1.2. Выбор вектора $u^0 = \{a_i^0\}_{i=0}^n \in E^{n+1}$ с разумным состоянием $v(\tau)$?

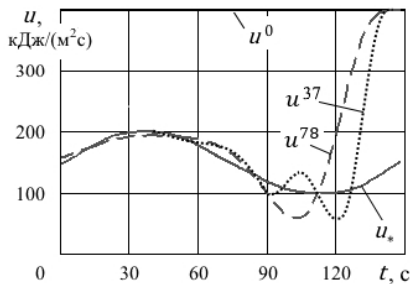
1.3. Если $\tau \not\approx 1$, имеем чрезмерно разную чувствительность функции $J(u)$ к компонентам u_i . Это эквивалентно минимизации $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_{E^{n+1}}$ с плохо обусловленной матрицей A . Без предобуславливания, при наличии вычислительных помех, эти задачи не решаются. Сходимость завершается далеко от оптимального вектора $u_* \in E^{n+1}$, который приблизительно аппроксимирует $u_*(\tau)$.

2. Представить бесконечномерную задачу оптимизации конечным набором значений управления в узлах сетки решения дифференциальных уравнений. Проверим это...

3. Результаты минимизации (градиентные методы)

Бесконечномерный градиентный метод (например, МНС):

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \nabla J(u^k; \tau), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

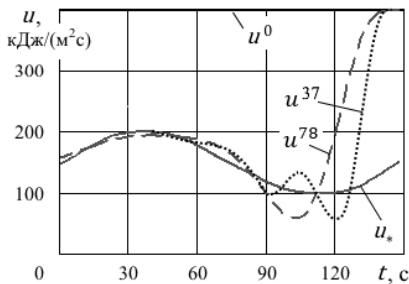


Сходимость $\|u^k - u^{k-1}\|_{L_2(S)}$ выполняется, но равномерная сходимость функций $|u^k(\tau) - u^{k-1}(\tau)|$ на S отсутствует.

3. Результаты минимизации (градиентные методы)

Бесконечномерный градиентный метод (например, МНС):

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \nabla J(u^k; \tau), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$



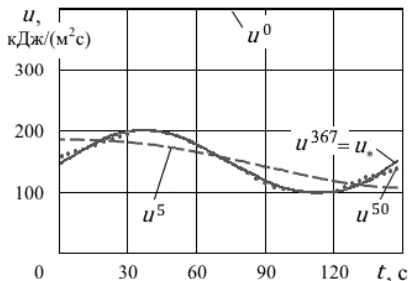
Сходимость $\|u^k - u^{k-1}\|_{L_2(S)}$ выполняется, но равномерная сходимость функций $|u^k(\tau) - u^{k-1}(\tau)|$ на S отсутствует.

4. Результаты минимизации (МРНС)

Метод с регулируемым направлением спуска относительно градиента (МРНСГ) (Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем. М.: Наука. 2025. (рукопись на сайте)):

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \alpha(\tau) \nabla J(u^k; \tau), \text{ равномерно на } S, k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

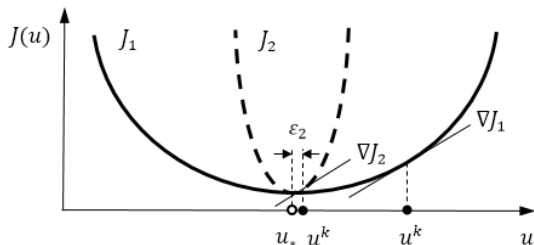
где $\alpha^k(\tau) \in C_+^1(S)$ — параметр регулирования направления спуска.



Когда, на основании каких критериев можно утверждать о близости решений $u^k(\tau)$ к $u_*(\tau)$?

5. Основные критерии завершения бесконечномерной оптимизации

1. $J(u^k) \leq \varepsilon_1$
2. $\|u^k - u^{k-1}\|_{L_2(S)} \leq \varepsilon_2$
3. $\|\nabla J(u^k)\|_{L_2(S)} \leq \varepsilon_3$



Все указанные критерии — косвенные и не отражают близость параметров $u^k(\tau)$ к $u_*(\tau)$. На основании чего можно утверждать что задача идентификации решена?

6. Утверждения о решении бесконечномерной задачи

Для утверждения, что «**задача идентификации параметров-функций решена**», необходимо одно из двух:

1. Обосновать существование равномерной сходимости в рассматриваемой задаче оптимизации (*повезло с задачей!*). Обоснование может быть получено из анализа **идентифицируемости** (**корректности**), либо из соответствующего вычислительного эксперимента;
2. Использовать методы оптимизации с равномерной сходимостью. (**Применение МРНС**).

Что необходимо для корректного решения задачи идентификации?

7. Что необходимо для корректного решения задачи идентификации как экстремальной?

1. Выявить условия существования градиента ∇J , т.е. условия идентифицируемости (Толстых В.К. ЖВМиМФ, 2024, № 6). Не любая производная Фреше J'_u является градиентом ∇J ;
2. Обеспечить **регуляризацию** в экстремальных алгоритмах решения обратной задачи идентификации.
3. + **Равномерная** сходимость.

Обсудим регуляризацию.

8. Корректность обратной задачи оптимизации

Все задач оптимизации — обратные!

Прямая задача (корректна по Адамару):

$$U \rightarrow V.$$

Обратная задача идентификации:

$$V \xrightarrow{\min J} u_* \in U.$$

Из пространства состояний V необходимо вернуться в точку $u_* \in U$ при условии $\min J$.

Согласно теории А.Н. Тихонова, для решения некорректных обратных задач необходимо ограничить пространство $U = L_2$ до компактного множества $\mathcal{U} \subset U$ существования, единственности и устойчивости. Необходима **регуляризация решения**, обеспечивающая $u^k \in \mathcal{U}, \forall k$.

9. Регуляризация решения (Толстых В.К. ЖВМиМФ, 1986)

Пусть $u^k \in \mathcal{U}$. Необходимо сделать "аккуратный" шаг, чтобы $u^{k+1} \in \mathcal{U}$. Берём сглаживающий функционал по Тихонову

$$T = J + \frac{1}{2} \int_S W^k \delta u^2 dS \rightarrow \min, \text{ где } \delta u = u^{k+1} - u^k,$$

где W^k — параметр регуляризации.

Экстремум от T по δu (оптимальный шаг δu):

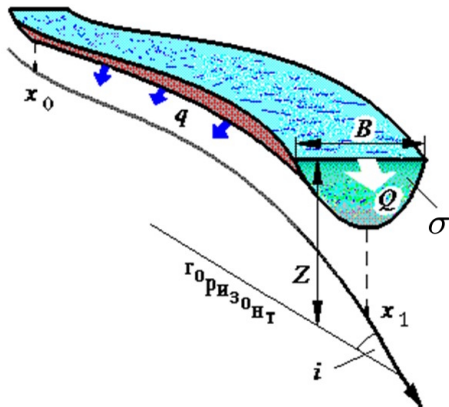
$$\nabla J^k + W^k \delta u = 0 \text{ на } S.$$

Получаем градиентный метод или МРНСГ:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha \nabla J^k,$$

здесь $W^k = \frac{1}{b^k \alpha}$. Параметры α и b^k являются параметрами регуляризации решения.

10. Идентификация шероховатости речного русла



Длина русла 20 км, глубина около 4м, волна проходит русло за 1.2 часа. Течение воды описывается квазиодномерной квазилинейной гиперболической системой.

11.

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (Z(x_b, t) - Z_e(t))^2|_{\omega=x_b \times (t_0, t_1)} dt.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + F = 0, \quad \text{на } \Omega \quad + \Gamma_{\text{pHY}},$$

где $v = (Q, Z)$ — расход и уровень воды,

матрица $A(v) = \begin{pmatrix} 2w & B(c^2 - w^2) \\ 1/B & 0 \end{pmatrix}$, $w = Q/\sigma$ — скорость,

свободный член $F(v, u) = (F_{fr} - w^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}|_Z, \quad 0)$,

$$F_{fr} = \frac{gQ|Q|}{\sigma RC^2}, \quad C = \frac{1}{u(x)} R^{\frac{1}{6}},$$

характеристики описывают скорость волн $\frac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c$.

12. Сопряжённая задача. Градиент

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A^{\textcolor{red}{T}} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f = 0, \quad \text{на } \Omega,$$

$$2wf_1 + \frac{1}{B}f_2 = 0, \quad \text{на } x_a,$$

$$B(c^2 - w^2)f_1 + \textcolor{red}{2}(Z - Z_e), \quad \text{на } x_b,$$

$$f = 0, \quad \text{начальное условие на } t_1.$$

Здесь $\mathbb{F}^* = \begin{pmatrix} \frac{2F_{fr}}{Q} & \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial Z} \\ -F_{fr} \left(\frac{B}{\sigma} + \frac{4}{3R} \frac{\partial R}{\partial Z} \right) + w^2 \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_Z - g \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_Z & \frac{1}{B^2} \left(q - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{\partial B}{\partial Z} \end{pmatrix}$

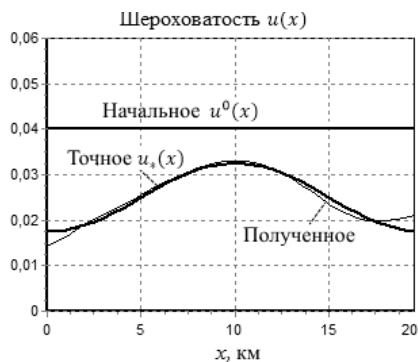
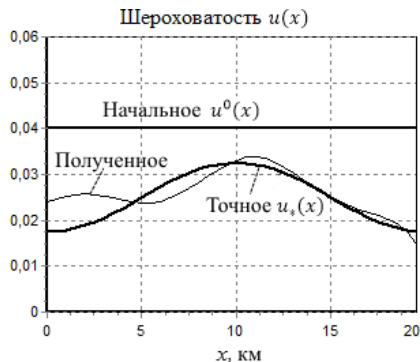
Градиент:

$$\nabla J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2F_{fr}}{u} f_1 dt.$$

Условие идентифицируемости (управляемости):

$$t_1 = t_0 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}.$$

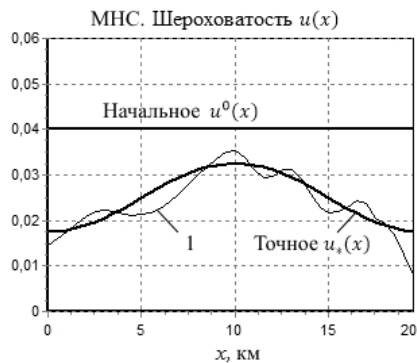
13. Результаты идентификации



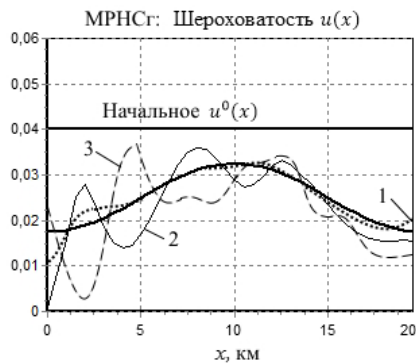
МНС $k = 152(449)$. МРНС_Г $k = 60(207)$, $\alpha(x) = \frac{0.2u^0}{|\nabla J(u^0; x)|}$.

В анализе **идентифицируемости** было получено, что сходимость м.б. равномерной, если диссипация и неоднотонность не существенно высокие.

14. Идентификация с помехами



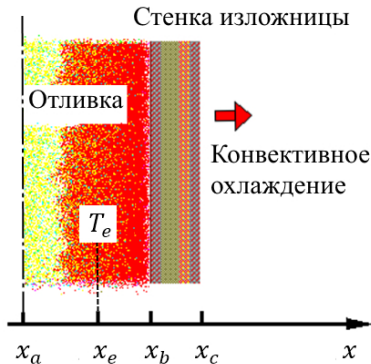
МНС



МРНСГ

Шумы: 1 — $\Delta Z = 2$ см; 2 — $\Delta Z = 5$ см; 3 — $\Delta Z = 10$ см.

15. Идентификация коэффициента теплопроводности отливки



В цилиндрическую изложницу заливается металл.

x_e — место размещения термопары для идентификации *эффективной* теплопроводности отливки по измерениям температуры $T_e(t)$.

16.

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (T(x_e, t) - T_e(t))^2 dt.$$

Параболическое уравнение теплопереноса:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{на } \Omega \quad + \Gamma_{\text{pHY}},$$

$$\Omega = (x_a, x_c) \times (t_0, t_1),$$

коэффициент теплопроводности всей системы

$$\lambda(x, t) = \textcolor{red}{u}(t)(1 - \Theta(x - x_b)) + \lambda_{\text{ст}}\Theta(x - x_b),$$

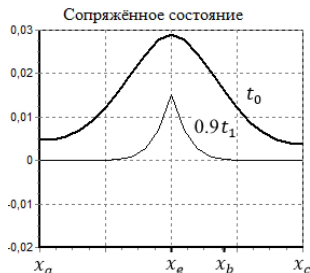
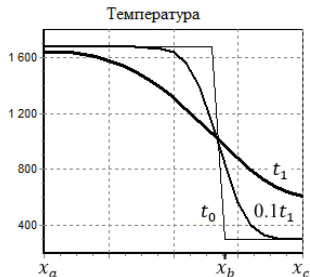
17. Сопряжённая задача. Градиент

$$-C\rho\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2(T|_{x_e} - T_e) = 0, \quad \text{на } \Omega, \quad +\text{ГрНУ}.$$

Градиент:

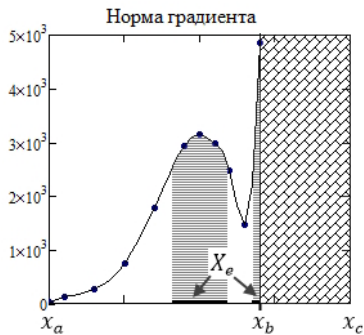
$$\nabla J = \int_{x_a}^{x_c} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \mathbb{U}^* f,$$

оператор $\mathbb{U}^*$ — вырожденный: $\exists\{f\}_{\text{Ker}} = 0$ при $u \neq u_*$.



17. Условие идентифицируемости

Градиент, его норма в зависимости от положения x_e термопары

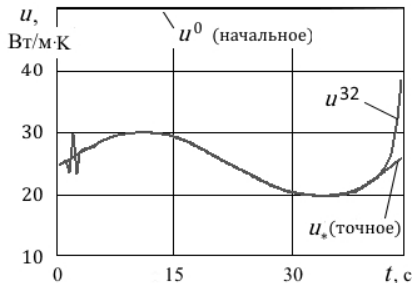


Условия идентифицируемости (управляемости):

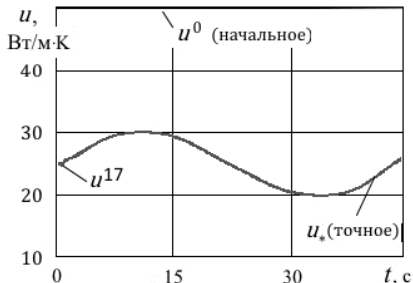
$$t \in (t_0, t_1 - \Delta t),$$

$$x_e \in X_e.$$

19. Результаты идентификации



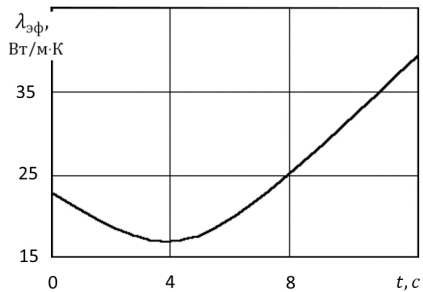
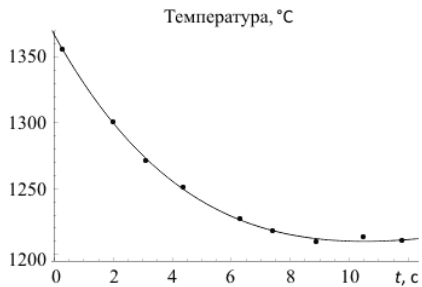
МНС.



$$\text{МРНСГ}, \alpha(t) = \frac{0.2u^0}{|\nabla J(u^0; t)|}.$$

Относительные детерминированные помехи легко устраняются параметром α .

19. Идентификация по экспериментальным данным



Толстых Виктор Константинович

URL <https://tolstykhh.com>

1. Толстых В.К. О применении градиентного метода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 137–140.
2. Толстых В.К. Об управляемости систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 2024, Т. 64, № 6, с. 959–972.
3. Толстых В.К. О градиенте в задачах оптимизации нестационарных систем с распределенным управлением // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26. № 3. С. 229-244.
4. Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем. М. : Наука. 2025. (Издание ожидается к концу года, сейчас на моём сайте)